Université Louis Pasteur
UFR de Sciences Economiques et de Gestion
Année 2006/2007

Licence Économie-Gestion
Économie Quantitative
Licence Mathématiques-Économie
Économie et Économétrie
Statistique et Applications

François Laisney
Guillaume Horny

Méthodes statistiques de l'économétrie I, TD 1

1. **Modèle linéaire** On considère une série de modèles semi-paramétriques caractérisés par des relations du type

$$Y = f\left[g\left(x\right), u\right],$$

où Y est la variable aléatoire expliquée, x est une variable explicative déterministe, u est une perturbation aléatoire d'espérance nulle, et les fonctions f et g sont connues à un vecteur de paramètres près. Pour chacun des choix suivants de la fonction g, dire

   (a) si le modèle peut être transformé en un modèle linéaire, et

   (b) quelle doit être la forme de la fonction f:

$$\begin{aligned} g\left(x\right) &= a + bx + cx^2, \\ g\left(x\right) &= ax^b, \\ g\left(x\right) &= \exp\left(a + bx + c\ln x\right), \\ g\left(x\right) &= \left(a + bx\right) / \left(c + dx\right), \\ g\left(x\right) &= \min\left[a + bx, c + dx\right]. \end{aligned}$$

2. **Densité et vraisemblance** L'exercice illustre la différence entre fonction de densité et fonction de vraisemblance:

   (a) Étant donnée une valeur du paramètre réel positif θ, écrire l'expression de la densité de la loi uniforme sur $[0, \theta]$ et représenter son graphe.

   (b) Étant donnée une observation y, représenter le graphe de la vraisemblance de θ.

(c) Donner l'expression de la densité d'un couple de variables aléatoires indépendantes distribuées selon la loi uniforme sur $[0, \theta]$ et représenter son graphe.

(d) Étant données deux observations y_1 et y_2 obtenues indépendamment à partir de cette loi uniforme, représenter le graphe de la vraisemblance de θ.

(e) Reprendre la question (d) pour un n-échantillon indépendant $y_1, \ldots,$ y_n.

3. **Contraste de Kullback** La loi exponentielle de paramètre θ a pour densité

$$\ell(y; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{y}{\theta}\right) \mathbf{1}[y \geq 0]$$

et pour espérance θ et pour variance θ^2.

(a) Déterminer le contraste de Kullback $I(P|P^*)$ entre deux lois exponentielles de paramètres θ et θ^*.

(b) Pour s'assurer que le résultat est au moins plausible, vérifier qu'il a bien les propriétés d'un contraste de Kullback.

4. **Contraste du chi-deux** Il s'agit de la quantité

$$\chi^2(P|P^*) = \int_{\mathcal{Y}} \frac{[\ell(y) - \ell^*(y)]^2}{\ell^*(y)} \mathrm{d}y.$$

(a) Montrer que

$$\chi^2(P|P^*) = E^*\left(\left[\frac{\ell(Y)}{\ell^*(Y)} - 1\right]^2\right) = V^*\left[\frac{\ell(Y)}{\ell^*(Y)}\right].$$

(b) En déduire que le contraste du chi-deux a les mêmes propriétés que le contraste de Kullback.

5. **Exogénéité** Pour la détermination simultanée du taux de salaire horaire d'un individu, w, et du nombre d'heures hebdomadaires de travail offertes par cet individu, h, on considère le modèle suivant:

$$\begin{array}{rcll} h & = & a \ln w + & xb + u, \\ \ln w & = & & zc + v, \end{array}$$

où x et z sont des vecteurs (ligne) déterministes, et le couple (u,v) est supposé normal, d'espérance nulle et de matrice de variance Ω.

(a) Quelle est la loi jointe de h et $\ln w$? [Indication: de quelle forme du modèle a-t-on besoin pour écrire cette loi jointe?]

(b) Quelle est la loi marginale de $\ln w$?

(c) Quelle est la loi conditionnelle de h sachant $\ln w$?

(d) À quelle condition $\ln w$ est-il *exogène* pour les paramètres a et b? [Indication: on rappelle que si

$$\begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} \backsim N\left(\begin{bmatrix} m_y \\ m_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}\right)$$

alors la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est normale, de moyenne

$$E\left(Y|X=x\right) = m_y + \frac{\sigma_{yx}}{\sigma_x^2}\left(x - m_x\right),$$

et de variance

$$V\left(Y|X=x\right) = \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_x^2} = \sigma_y^2\left(1-\rho_{xy}^2\right),$$

où ρ_{xy}^2 dénote le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Cette propriété de la loi normale bivariée sera montrée dans le chapitre suivant.]