Université Louis Pasteur
UFR de Sciences Economiques et de Gestion
Année 2006/2007

Licence Économie-Gestion
Économie Quantitative
Licence Mathématiques-Économie
Économie et Économétrie
Statistique et Applications
François Laisney
Guillaume Horny

Méthodes statistiques de l'économétrie I, TD n2

1. **Produit scalaire et projecteur**.

   (a) Donner pour $E = \mathbb{R}^2$ et un choix de base un exemple de matrice Ω d'un produit scalaire ω et un exemple de matrice P d'un projecteur orthogonal pour le produit scalaire de matrice identité.

   (b) X étant une matrice $(n \times K)$ de rang K, dire ce que représente la matrice
   $$Q = X\left(X'\Omega X\right)^{-1} X'\Omega.$$
   [Indication: étudier la matrice Q^2.]

   (c) Caractériser l'image et le noyau de Q.

2. **Décomposition de la variance.** On considère trois vecteurs aléatoires X, Y et Z.

   (a) Énoncer et démontrer la propriété de décomposition de la variance de Y (en utilisant le conditionnement par X).

   (b) En déduire la propriété:
   $$\text{cov}(Y, Z) = E\left[\text{cov}(Y, Z|X)\right] + \text{cov}\left[E(Y|X), E(Z|X)\right].$$

3. **Variance marginale et variance conditionnelle.** On considère deux vecteurs aléatoires X et Y. On suppose que $E(Y|X) = 0$.

   (a) Montrer que l'on a alors $V(Y) = E\left[V(Y|X)\right].$

(b) En déduire qu'en général il existe alors des valeurs x de X pour lesquelles la variance marginale de Y excède la variance conditionnelle $V(Y|X=x)$ et d'autres valeurs pour lesquelles $V(Y) < V(Y|X=x)$.

(c) Donner l'expression de $V(Y|X=x)$ sous l'hypothèse que le couple (X,Y) est normal. Quelle est la caractéristique frappante du résultat au regard de b? Que peut-on dire ici de la comparaison entre $V(Y)$ et $V(Y|X=x)$?

(d) Comment peut-on réconcilier ce dernier fait avec ce que l'on a constaté en b? [Indication: quelle est l'expression de $E(Y|X)$ pour un couple normal?]

4. **Loi normale bidimensionnelle**. On considère un couple gaussien de variables aléatoires (X,Y) de loi:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Déterminer:

(a) la loi conditionnelle de X sachant Y;

(b) la loi de $Z = X - Y$;

(c) la loi de Z sachant X.

5. **Calcul d'espérance**. Démontrer que si la variable aléatoire réelle Y est distribuée selon la loi log-normale de paramètres μ et σ^2, c'est à dire si $\ln Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors l'espérance de Y est donnée par:

$$E(Y) = \exp\left(\mu + \sigma^2/2\right).$$

6. **Théorème de Frisch-Waugh.** On considère le modèle linéaire de panel $y_{it} = a_i + x_{it}b + u_{it}$, $i = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$, où les données sont obtenues en observant n individus pendant T périodes; les a et b sont des paramètres réels, et y_{it}, u_{it} et x_{it} sont des variables aléatoires réelles avec $E(u_{it}|x_{it}) = 0$.

(a) Écrire ce modèle sous forme matricielle en utilisant les matrices y, u et x, de taille $(nT \times 1)$ et la matrice D de taille $(nT \times n)$ et d'élément courant $D_{it,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

(b) Déterminer la matrice P_D du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les colonnes de D.

(c) Montrer que l'image de x par $Id-P_D$ est le vecteur de composantes $x_{it} - \bar{x}_i$ obtenu en "centrant" sur les moyennes par individu.

7. **Modèle semi-linéaire et théorème de Frisch-Waugh** : On considère le modèle semi-linéaire suivant:

$$y = E(y|x,z) + u = xb + f(z) + u,$$

où y et z sont deux variables aléatoires réelles observables, x est un vecteur aléatoire réel observable, u est une variable aléatoire réelle non observable et b est un vecteur inconnu. On se propose d'estimer b et la fonction inconnue f, sans faire d'hypothèse sur la forme de la fonction f.

(a) Montrer que les hypothèses faites impliquent que $E(u|x,z)$ est nulle.

(b) En déduire que $E(u|z) = 0$.

(c) Montrer que

$$y - E(y|z) = [x - E(x|z)]\, b + u,$$

et en déduire une procédure d'estimation convergente de b en supposant que l'on sait comment estimer $E(y|z)$ et $E(x|z)$ [cette dernière technique d'estimation vous est encore inconnue, mais elle ne joue aucun rôle dans la réponse à la question posée]. En quoi cette procédure est-elle une application du théorème de Frisch-Waugh?

(d) À partir de l'expression

$$y - xb = f(z) + u,$$

proposer alors une procédure d'estimation de la fonction f.

(e) Que pensez-vous de l'identification du terme constant de $E(y|x,z)$?