Université Louis Pasteur
UFR de Sciences Economiques et de Gestion
Année 2006/2007

Licence Économie-Gestion
Économie Quantitative
Licence Mathématiques-Économie
Économie et Économétrie
Statistique et Applications
François Laisney
Guillaume Horny

Méthodes statistiques de l'économétrie I, TD 3

1. **Modèle logit conditionnel** On considère le modèle latent à double indice
$$y_{it}^{*} = x_{it}b + u_i + v_{it}, i = 1, ..., n, \quad t = 1, 2,$$
pouvant servir à décrire des données individuelles temporelles, ou données de panel: pour chaque individu i d'un échantillon au hasard (tirages indépendants) on observe le couple (y_i^*, x_i) sur un nombre de périodes ici restreint à 2 (en principe – en fait on observera ici seulement une fonction de y_i^*) .

   Le terme d'erreur aléatoire v_{it} est supposé indépendant de x_{i1} et x_{i2} ainsi que de v_{is} pour $s \neq t$, et suit la loi logistique, de fonction de répartition
$$F(v) = \frac{1}{1 + \exp(-v)}.$$
   Le modèle comporte, outre ce terme d'erreur, un *terme d'hétérogénéité* u_i considéré comme déterministe, souvent qualifié d'*effet fixe*.

   Enfin le modèle observable est défini par $y_{it} = \mathbf{1}\left[y_{it}^*\right]$.

   (a) Montrer que la statistique
$$S\left(y_{i1}, y_{i2}\right) = y_{i1} + y_{i2}$$
   est (partiellement) exhaustive pour le paramètre u_i. [Indication: montrer que $P[y_{i1} = 1|y_{i1} + y_{i2} = 1]$ ne dépend pas de u_i.]

   (b) Seule une partie des observations sera informative dans le modèle conditionnel: laquelle? [Indication: que valent $P[y_{i1} = 1|y_{i1} + y_{i2} = 2]$ et $P[y_{i1} = 0|y_{i1} + y_{i2} = 0]$?]

2. **Statistique exhaustive minimale** Soient $Y_1, ..., Y_n$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

   a. Quelle est la loi de la statistique $S(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$?

   b. Montrer que la loi conditionnelle de Y sachant $S(Y) = s$ est la loi multinomiale $\mathcal{M}\big(s; \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}\big)$. En déduire que $S(Y)$ est exhaustive.

   c. Utiliser les résultats généraux concernant les familles exponentielles pour montrer que $S(Y)$ est exhaustive *minimale.*

3. **Identification** Montrer que toute fonction d'une fonction identifiable du paramètre θ d'un modèle est elle-même identifiable. [Indication: revenir à la définition d'une fonction identifiable du paramètre].

4. **Modèle probit** On considère le modèle latent linéaire à erreurs normales indépendantes $Y_i^* \backsim N(x_i\beta, \sigma^2)$ et le modèle observable $Y_i = \mathbf{1}\left[Y_i^* \geq 0\right]$. Ce modèle observable est appelé *modèle probit.*

   a. Écrire la vraisemblance et le score pour le modèle probit, et vérifier que l'espérance du score est bien nulle.

   b. Même exercice pour le *modèle logit* obtenu comme ci-dessus, mais sous l'hypothèse d'erreurs indépendantes suivant la loi logistique d'espérance nulle, de fonction de répartition $F(u) = 1/\left[1 + \exp\left(-u\right)\right]$.

5. **Décomposition de l'information et décomposition de la variance**

   (a) Montrer qu'étant donnés un modèle paramétrique et une statistique S, le score dans le modèle image par S coïncide avec l'espérance conditionnelle du score dans le modèle initial sachant $S\left(Y\right)$, c'est à dire:
   $$\frac{\partial \ln \ell\left[S\left(Y\right); \theta\right]}{\partial \theta} = \underset{\theta}{E}\left[\frac{\partial \ln \ell\left(Y; \theta\right)}{\partial \theta} | S\left(Y\right)\right].$$
   [Indication: ce résultat d'apparence formidable se démontre en trois lignes; il suffit de dériver par rapport à θ le logarithme de la factorisation de $\ell\left(Y; \theta\right)$ faisant intervenir le conditionnement par $S\left(Y\right)$, de prendre l'espérance conditionnelle sachant $S\left(Y\right)$ de la somme obtenue, et d'utiliser le fait que l'espérance conditionnelle sachant $S\left(Y\right)$ du score dans le modèle conditionnel est nulle.]

   (b) Montrer que dans l'identité $I\left(\theta\right) = I^S(\theta) + E_\theta I^{Y|S}(\theta)$ la quantité $E_\theta I^{Y|S}(\theta)$ peut encore s'écrire
   $$\underset{\theta}{E}\, I^{Y|S}(\theta) = \underset{\theta}{V}\left[\frac{\partial \ln \ell\left(Y|S; \theta\right)}{\partial \theta}\right].$$