Université Louis Pasteur
UFR de Sciences Economiques et de Gestion
Année 2006/2007

Licence Économie-Gestion
Économie Quantitative
Licence Mathématiques-Économie
Économie et Économétrie
Statistique et Applications

François Laisney
Guillaume Horny

Méthodes statistiques de l'économétrie I, TD n°4

1. **Risque quadratique** On considère un vecteur aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Pour un choix de base, soient Y_1, Y_2 et Y_3 les composantes de Y. Sur cette même base, la matrice de variance de Y est la matrice unité, et son espérance le vecteur $m = (a, b, a)'$. On s'intéresse à l'estimation du couple (a, b).

   a. Déterminer le risque matriciel des deux estimateurs suivants:

   $$\delta = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \delta^* = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 - Y_1 + Y_3 \end{bmatrix}.$$

   b.Vérifier que les deux matrices de risque ne sont pas comparables et que pourtant

   $$V\delta_1^* = V\delta_1 \quad \text{et} \quad V\delta_2^* > V\delta_2.$$

   c. Vérifier que

   $$trR\left[\delta^*, \theta\right] \geq trR\left[\delta, \theta\right] \quad \forall \theta = (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

   Conclusion?

2. **Convergence en moyenne quadratique** Soit $\delta_n(Y)$ un estimateur de $g(\theta) \in \mathbb{R}$ convergent en moyenne quadratique.

   a. Établir l'inégalité:

   $$P_{n,\theta}\left[|\delta_{n,\theta}(Y) - g(\theta)| > \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \underset{\theta}{V}\, \delta_n(Y) + \left[\underset{\theta}{E}\, \delta_n(Y) - g(\theta)\right]^2.$$

   b. Si par ailleurs

   $$\sqrt{n}\left[\delta_n(Y) - g(\theta)\right] \approx N(0, \sigma^2(\theta)),$$

   obtenir une approximation asymptotique de

   $$P_{n,\theta}\left[|\delta_{n,\theta}(Y) - g(\theta)| > \varepsilon\right],$$

   et comparer cette approximation avec la majoration ci-dessus.

3. **Amélioré de Rao-Blackwell** Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. selon la loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$.

   (a) Montrer que $T(Y) = \mathbf{1}\,[Y_1 = 0]$ est un estimateur sans biais de $g(\theta) = \exp(-\theta)$.

   (b) Déterminer la loi conditionnelle de Y_1 sachant la statistique exhaustive $S(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

   (c) En déduire que l'amélioré de Rao-Blackwell de $T(Y)$ est

$$T^*(Y) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S(Y)}.$$

   (d) Montrer que cet estimateur est optimal dans la classe des estimateurs sans biais, mais qu'il n'est pas efficace.

4. **Estimateur optimal sans biais** On considère un paramètre θ partitionné en $\theta = (\alpha', \beta')'$, et $\hat{\alpha}$ estimateur sans biais optimal de α, et $\tilde{\beta}$ estimateur sans biais de β.

   (a) Montrer que $\mathrm{cov}_\theta\left(\hat{\alpha}, \tilde{\beta}\right)$ ne dépend pas de $\tilde{\beta}$.

   (b) En déduire que si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont i.i.d. selon la loi $N(m, \sigma^2)$ la moyenne empirique $\overline{Y}$ est sans corrélation avec tout estimateur sans biais de σ^2.

5. **Une CNS pour que les estimateurs des moindres carrés ordinaires (MCO), $\hat{\beta}_n$, et des moindres carrés généralisés (MCG), $\overset{\approx}{\beta}_n$, coincident:**

   On se propose de montrer par étapes que, pour le modèle

$$y = Xb + u \quad \text{avec} \quad V(u) = \Omega,$$

$$\hat{\beta}_n = \overset{\approx}{\beta}_n \Longleftrightarrow \exists G \quad \Omega X = XG.$$

   (a) Montrer que si G est telle que que $\Omega X = XG$, alors

$$G = \left(X'X\right)^{-1} X'\Omega X = \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'X.$$

   (b) Montrer que l'on a bien alors $\hat{\beta}_n = \overset{\approx}{\beta}_n$.

   (c) Montrer la réciproque.

   (d) Que dire de la variance de ces estimateurs?