Université Louis Pasteur
UFR de Sciences Economiques et de Gestion
Année 2005/2006

Licence Économie-Gestion
Économie Quantitative
Licence Mathématiques-Économie
Économie et Économétrie
Statistique et Applications
François Laisney
Guillaume Horny

Méthodes statistiques de l'économétrie I, TD n°5

1. **Données de panel:** On considère le **modèle à erreurs composées**

$$y_{it} = x_{it}b + u_i + v_{it}, \quad i = 1, ..., n, \quad t = 1, \ldots, T,$$

où les termes d'erreur aléatoires u_i et v_{it}, de variances $Vu_i = \sigma_u^2$ et $Vv_{it} = \sigma_v^2$, sont supposés mutuellement indépendants, et indépendants de x_{it} ainsi que de v_{is} pour $s \neq t$. (Contrairement à ce qui se passait dans l'exercice 1 du TD 5, le **terme d'hétérogénéité** u_i est ici aléatoire, d'où la dénomination d'**effet aléatoire**). On suppose pour simplifier que b est un scalaire.

(a) Montrer que la transformation que suggère l'application du théorème de Frisch-Waugh dans le cas d'effets fixes conduit ici encore à l'élimination du terme d'hétérogénéité.

(b) En désignant par y_i le vecteur obtenu en empilant les T observations relatives à l'individu i, et en procédant de même pour x_i et v_i, justifier l'écriture

$$y_i = x_i b + \iota_T u_i + v_i,$$

et montrer que

$$V(y_i|x_i) = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 + \sigma_v^2 & \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_u^2 \\ \sigma_u^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \sigma_u^2 \\ \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_u^2 & \sigma_u^2 + \sigma_v^2 \end{bmatrix} =: \Sigma = \sigma_v^2 Id_T + \sigma_u^2 \iota_T \iota_T'.$$

(On parle alors d'**équicorrélation**: pourquoi?).

(c) En désignant par y le vecteur obtenu en empilant les n vecteurs y_i (et en procédant de même pour x, u et v), justifier l'écriture

$$\underset{nT\times 1}{y} = \underset{nT\times 1}{xb} + \underbrace{(Id_n \otimes \iota_T)}_{nT\times n} \underset{n\times 1}{u} + \underset{nT\times 1}{v}, \tag{1}$$

et montrer que $V(y|x) = Id_n \otimes \Sigma =: \Omega$.

(d) La transformation mentionnée à la question 1a consiste à retrancher à chaque variable la moyenne par individu correspondante. Montrer que si on note

$$\tilde{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i = (x_{it} - \bar{x}_i)\, b + v_{it} - \bar{v}_i = \tilde{x}_{it} b + \tilde{v}_{it}, \quad i = 1, ..., n, \quad t = 1, \ldots, T,$$

soit en empilant les observations comme ci-dessus

$$\tilde{y} = \tilde{x} b + \tilde{v}, \tag{2}$$

cette dernière équation correspond à la projection de l'équation (1) obtenue avec le projecteur orthogonal $W = Id_n \otimes (Id_T - P_{\iota_T})$ — la notation W est justifiée par la dénomination "transformation *within*". En déduire que $V(\tilde{y}|\tilde{x}) = W\Omega W = W\sigma_v^2$.

(e) Pourquoi l'estimateur des moindres carrés ordinaires de b dans le modèle (2) est-il optimal dans la classe des estimateurs linéaires sans biais?

(f) Proposer un estimateur sans biais de σ_v^2.

2. **Régressions empilées: le cas de régresseurs identiques** (applications: modèles d'allocation — demandes de biens de consommation, demandes de facteurs de production, choix de portefeuille).

On considère le modèle

$$\begin{aligned} y_{1i} &= x_i b_1 + u_{1i}, \\ y_{2i} &= x_i b_2 + u_{2i}, \end{aligned}$$

avec (y_i, x_i), $i = 1, \cdots, n$ i.i.d., où y_i dénote le vecteur de composantes y_{1i} et y_{2i}, et $E(y_i|x_i) = 0$, $V(y_i|x_i) = \Sigma$, matrice de variance a priori quelconque. On suppose ici que x_i est un vecteur ligne à k composantes. En *empilant* les deux régressions, on obtient la régression

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 0 \\ 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1n} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix},$$

soit encore:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

c'est à dire

$$y = (Id_2 \otimes X)\, b + u =: \tilde{X} b + u. \tag{3}$$

(a) Montrer que $V(u|X) = \Sigma \otimes Id_n =: \Omega$.

(b) Montrer que $\Omega \tilde{X} = \tilde{X} \Omega$ et en déduire l'optimalité de l'estimateur des moindres carrés de b dans l'équation (3) — préciser de quelle optimalité il s'agit.

[Indication: utiliser les propriétés du produit tensoriel

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(C \otimes D) &= (AC \otimes BD) \\ (A \otimes B)' &= A' \otimes B' \\ (A \otimes B)^{-1} &= A^{-1} \otimes B^{-1}.] \end{aligned}$$

3. **Régressions empilées: le cas général:**

On considère le modèle

$$\begin{aligned} y_{1i} &= x_{1i} b_1 + u_{1i}, \\ y_{2i} &= x_{2i} b_2 + u_{2i}, \end{aligned}$$

avec (y_i, x_i), $i = 1, \cdots, n$ i.i.d. et $E(y_i|x_i) = 0$, $V(y_i|x_i) = \Sigma$, matrice de variance quelconque. Donner une condition suffisante sur Σ pour que les estimateurs MCO et MCG de b dans la régression empilée coincident.

4. **Maximum de vraisemblance** On considère un échantillon indépendant tiré de la loi

$$N\left[\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right].$$

   (a) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du coefficient de corrélation ρ en supposant connus les autres paramètres.

   (b) Même question en supposant les autres paramètres inconnus.

5. **Théorème de Cramer (delta method)** On considère le modèle de consommation de court terme suivant:

$$\ln C_t = a_0 + a_1 \ln C_{t-1} + b_0 \ln R_t + b_1 \ln R_{t-1} + u_t,$$

   où l'on suppose que les perturbations u_t sont i.i.d. $N(0, \sigma^2)$.

   (a) Donner l'expression de l'élasticité de long terme de la consommation par rapport au revenu.

   (b) On suppose que l'on estime cette élasticité à partir de cette expression et à partir de l'estimateur du maximum de vraisemblance du vecteur $\theta = (a_0,\, a_1,\, b_0,\, b_1)'$. Déterminer la loi asymptotique de l'estimateur ainsi obtenu.

6. **Information** On considère un échantillon indépendant $Y_1^*, \ldots, Y_n^*$ tiré de la loi $N(m, 1)$. On s'intéresse à l'influence de l'observabilité de Y^* sur la variance de l'estimateur du maximum de vraisemblance en comparant les trois cas suivants:

   (a) modèle de régression linéaire: $Y_i = Y_i^*$,

   (b) modèle Tobit: $Y_i = Y_i^* \, \mathbf{1}\left[Y_i^* > 0\right]$,

   (c) modèle probit: $Y_i = \mathbf{1}\left[Y_i^* > 0\right]$.

   Calculer dans chacun des cas la variance asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance de m. Discuter en fonction des valeurs de m l'importance de la perte d'information liée au passage d'un niveau d'observabilité au niveau inférieur. [Une représentation graphique faite avec SHAZAM est fortement recommandée].