

Probabilités, TD 2

Exercice 1 : Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires.

1. On tire au hasard 2 fois une boule de l'urne en remettant la boule après tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 1 boule noire :
 - (a) dans cet ordre ?
 - (b) dans un ordre quelconque ?
2. mêmes questions si les tirages se font sans remise
3. on tire simultanément 5 boules de l'urne Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 3 boules noires ?

Exercice 2 : On jette trois fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b et c les numéros obtenus. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer les probabilités pour que le polynôme Q :

1. ait 2 racines réelles distinctes,
2. ait une racine réelle double,
3. n'ait pas de racine réelle.

Exercice 3 : On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et la probabilité d'obtenir "face" est $q = 1 - p$ ($p \in]0, 1[$).

1. Soit A_n l'événement : "La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $n - 1$ et n ". Calculer $P(A_n)$.
2. Soit B l'événement : "La séquence PP apparaît sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant". Calculer $P(B)$.

Exercice 4 : Pour se rendre à un lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires : A, B, C et D. La probabilité qu'il a de choisir A (resp. B, C) est de $1/3$ (resp. $1/4, 1/12$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B, C) est $1/20$ (resp. $1/10, 1/5$). En empruntant D, il n'est jamais en retard.

1. quelle est la probabilité que l'élève choisisse l'itinéraire D ?
2. l'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 5 : On range 10 livres au hasard sur une étagère. Quelle est la probabilité p pour que 3 livres donnés soient rangés côte à côte ?

Exercice 6 : Dans un supermarché se trouvent 150 cartons de lait dont 50 avariés. 150 acheteurs prennent chacun un carton au hasard dans l'ordre d'arrivée. Voulez vous être le 1er, le 2d, ... le 150ème acheteur ?

Exercice 7 : Soient A et B deux événements tels que : $p(A) = p(B) = 3/4$. Trouver les valeurs maximales et minimales de $p(A \cap B)$.

Exercice 8 : On tire n équipes de football de 1ère division et n équipes de 2d division. On tire au sort n rencontres entre ces $2n$ équipes (chaque équipe joue un match et un seul).

1. calculer les probabilités p_n pour que tous les matchs opposent une équipe de 1ère division à une équipe de 2nd division.
2. calculer les probabilités q_n pour que tous les matchs opposent deux équipes de la même division
3. montrer que $2^{2n-1}/n \leq C_{2n}^n \leq 2^{2n}$
4. calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$

Exercice 9 :

1. Montrer que :

$$\sum_{p=1}^n p(p+1) \dots (p+k) = \frac{n(n+1) \dots (n+k+1)}{k+2}, k \in \mathbf{N}^* \quad (1)$$

2. Au loto, on tire 6 numéros parmi 49. Quelle est la probabilité qu'on obtienne au moins deux numéros consécutifs ?

Exercice 10 : Un sac contient 3 jetons. L'un de ces 3 jetons à deux faces noires, un autre 2 faces blanches et le troisième a une face blanche et une face noire. On tire au hasard un jeton du sac et on le pose sur la table. La face visible est noire. Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait deux faces noires ?