Université Robert Schuman
IPAG
Année 2006/2007

Prépa Economistes et Mathématiciens
Probabilités
Guillaume Horny

Probabilités, TD 4

Exercice 1

1. Soit X une V.A.R discrète prenant les valeurs 1,2,3,4,5,6 avec les probabilités respectives 0.1 ; 0.2 ; 0.1 ; 0.3 ; 0.1 et 0.2. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Soit Y une V.A.R discrète prenant les valeurs 3,4,5,6. Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que : $P(Y < 5) = 1/3, P(Y > 5) = 1/2, P(Y = 3) = p(Y = 4)$. Calculer $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(Y)$.
3. Soit $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z si l'on suppose que X et Y sont indépendantes.

Exercice 2 : Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de X ?

Exercice 3 : Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n une à une $(n \geq N)$. Soit X le plus petit et Y le plus grand des numéro obtenus.

1. Calculer $p(X \geq x), \forall x \in [\![1, N]\!]$ En déduire la loi de X.
2. Calculer $p(Y \leq y), \forall y \in [\![1, N]\!]$ En déduire la loi de Y.
3. Calculer $p[(X > x) \cap (Y \leq y)], \forall (x, y) \in [\![1, N]\!]^2$. En déduire la loi du couple (X, Y).

   Note : On étudiera les trois questions dans le cas de tirages avec remise, puis sans remises.

Exercice 4 : Soit X une V.A.R à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$, dont la loi de probabilité est définie par : $\begin{cases} p(X = 0) = p(X = 3) = \theta \\ p(X = 1) = p(X = 2) = \frac{1}{2} - \theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 1/2[$.

Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

On pose $R = X(X-1)(X-2)(X-3)$. Donner la loi de probabilité de R.

On pose :

$$S = \frac{(1-X)(2-X)(3-X)}{6} T = \frac{X(3-X)}{2} V = \frac{X(X-1)(X-2)}{6}$$

Donner la loi de ces trois V.A.R et calculer le coefficient de corrélation de S et T.

Exercice 5 :

1. Montrer que :
$$C_{n-1}^{n-1} + C_{n}^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^{2n-1} = C_{n}^{2n} \tag{1}$$
2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules une à une sans remise. Soit X le rang de sortie de la dernière boule noire. Déterminer la loi de X et $\mathrm{E}(X)$.

Exercice 6 : Des vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0.15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches, on fait une analyse de lait. Il y a deux manières différentes de procéder :

Méthode 1 : On effectue une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache

Méthode 2 : On effectue une analyse sur un échantillon du mélange des laits des n vaches et si le résultat est positif, on effectue une analyse pour chaque vache.

Soit X_n le nombre d'analyses effectuées dans la seconde méthode. On pose $Y_n = X_n/n$.

1. Déterminer la loi de Y_n puis $\mathrm{E}(Y)$, en fonction de n.
2. On voudrait connaître la méthode la plus économique en fonction du nombre d'animaux.
   - **a** Etudier la fonction : $n \mapsto ax + \ln x$, où a est un réel strictement négatif. Montrer qu'elle admet un maximum positif lorsque l'on choisit $a = \ln 0.85$.
   - **b** Trouver dans ce cas la plus grande valeur entière de x pour laquelle $f(x) > 0$.
   - **c** Démontrer que $f(n) > 0$ équivaut à $\mathrm{E}(Y_n) < 1$. En déduire, suivant les valeurs de n, la méthode que l'on a intérêt à adopter.