Université Robert Schuman
IPAG
Année 2006/2007

Prépa Economistes et Mathématiciens
Probabilités
Guillaume Horny

Probabilités, TD 6

Exercice 1 :

Pour cambrioler le coffre-fort de Picsou, les Rapetou disposent d'un trousseau de n clef distinctes dont une seule permet de l'ouvrir. Lorsqu'ils opèrent de nuit, ils mélangent les clefs après chaque essai alors que de jour, ils retirent la mauvaise clef du lot après chaque tentative infructueuse.

Soit X le nombre de clefs utilisées de jour et Y le nombre de clefs utilisées de nuit pour parvenir à ouvrir le coffre. Déterminer la loi et l'espérance des variable aléatoires X et Y.

Exercice 2 :

On considère n ($n \geq 3$) boites numérotées de $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Un objet est caché ans l'une de ces boites (de façon équiprobable) et on cherche à a localiser, c'est-à-dire à connaitre le numéro de la boite qui le contient. Pour cela, on ouvre successivement les boites $B_1, B_2, \ldots, B_k$, juqu'à ce que l'on puisse déterminer à coup sûr dans quelle boite se trouve l'objet.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boites ouvertes

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 3 :

On appelle mode de la variable aléatoire X la valeur de k pour laquelle $\mathrm{p}[X = k]$ est maximale. En étudiant la suite $(r_k)_{k \in N^*}$ défini par :

$$\forall k \in N^*, r_k = \frac{p[X = k]}{p[X = k-1]}, \qquad (1)$$

donner

1. le(s) mode(s) d'une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda \in R_+^*$).
2. le(s) mode(s) d'une loi Binomiale de paramètre n ($n \in N^*$) et p ($p \in]0, 1]$).

Exercice 4 :

Soit r un entier naturel non nul. On considère une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir pile est p ($p \in]0,1[$) et la probabilité d'obtenir face est $q = 1 - p$. On lance successivement cette pièce jusqu'à obtenir r fois pile. Soit X le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du $r^{\text{ème}}$ pile.

1. Déterminer la loi de X, en précisant pour tout entier k, p$(X = k + r)$.
2. (a) Soit $(s_n(r))_{n \in N}$ la suite définie par :

$$\forall n \in N, s_n(r) = \sum_{k=0}^{n} C_{k+r}^{r} q^k. \tag{2}$$

   Montrer que pour tout entier naturel n :

$$p s_n(r) = s_n(r-1) - C_{n+r}^{r} q^{n+1}. \tag{3}$$

   Donner un équivalent lorsque n tend vers ∞ de C_{n+r}^{r}. En déduire la limite de $s_n(r)$ lorsque n tend vers l'infini, que l'on notera s(r).

   (b) A l'aide des résultats de la question précédente, en déduire l'espérance et la variance de X.
3. Soit maintenant Y le nombre de fois où l'on a obtenu face avant d'avoir pour la $r^{\text{ème}}$ fois pile. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.