Université Robert Schuman — Prépa Economistes et Mathématiciens
IPAG — Probabilités
Année 2006/2007 — Guillaume Horny

Probabilités, TD 7

Exercice 1 :
Soient a, b et N trois entiers naturels non nuls tels que $N = a+b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires dans lesquelles on effectue des tirages successifs, au hasard et avec remise de la manière suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne mais remplacée dans cette urne par une boule blanche.

On notera alors Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boucle blanche, et X_n $(n \in N^*)$ le nombre de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages.

1. (a) Déterminer la loi de probabilité de Y. Montrer alors que :

$$\forall k \in [[1, b]], p(Y = k) = \frac{b!}{N^b} \left(\frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} \right). \qquad (1)$$

   (b) Soit G la fonction définie sur R par : $\forall x \in R, G(x) = \sum_{k \in Y(\Omega)} p(Y = k)x^k$. Montrer que :

$$\forall x \in R, G(x) = 1 + \frac{b!}{N^b}(x-1) \sum_{k=0}^{b} \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} x^k. \qquad (2)$$

   En déduire l'espérance de Y.

   (a) Pour tout $k \in N^*$, déterminer la probabilité qu'une boule noire apparaisse au $k^{\text{ème}}$ tirage.

   (b) En déduire l'espérance de X_n $(n \in N^*)$.

Exercice 2 :
Soit un ensemble E constitué de M éléments de type et $N - M$ éléments de type 2. On effectue n tirages sans remise dans E. Soit X_k la VAR définie par :

- $X_k = 1$ si le $k^{\text{ème}}$ tirage dans E donne un élément de type 1
- $X_k = 0$ si le $k^{\text{ème}}$ tirage dans E donne un élément de type 2

Soit $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer la loi de X_k, $E(X_k)$ et $V(X_k)$.
3. Pour tous i et j distincts dans [1,n], déterminer $\text{cov}(X_i, X_j)$.
4. Retrouver $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3 :
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X dans les trois cas suivants :

1. Il existe $k \in]0, 1[$ tel que $p(X = n) = kp(X \geq n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $4p(X = n + 2) = 5p(X = n + 1) - p(X = n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. $p(X = n) = \frac{3}{n} p(X = n - 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.