Econométrie des données de panel

Guillaume Horny*

*Banque de France

Master 2 MASERATI

Chapitre 2 : Le modèle à effet aléatoire

Plan

Plan

Variable aléatoire ou paramètre ?

Modèle de base :

$$y_{it} = x_{it}^{'}\beta + \alpha_i + \epsilon_{it},$$

Est-il plus judicieux de considérer α_i comme un paramètre à estimer ou une variable aléatoire (avec sa propre distribution, sa propre variance) ?
Pour distinguer les deux modèles, on parle traditionnellement de modèle à **effet fixe** et de modèle à **effet aléatoire**.

Pourquoi s'intéresser à ce modèle ?

- les paramètres de variables constantes dans le temps ne sont pas identifiés dans le modèle à effets fixes individuels
- l'estimateur *within* est peu précis lorqu'il n'y a que peu de variation intra-individuelle. Rappellez-vous :

$$\text{Var}(\widehat{\beta}_W|X) = \sigma_\epsilon^2 \left(\sum_i \sum_t (X_{2it} - X_{2i.})'(X_{2it} - X_{2i.}) \right)^{-1}.$$

  lorsque $X_{2it} - X_{2i.} \to 0$, $\text{Var}(\widehat{\beta}_W|X) \to \infty$.
- sous certaines conditions, il conduit à des estimateurs plus précis que l'estimateur *within*

Le modèle à effet aléatoire

$$y_{it} = x_{it}^{'}\beta + \epsilon_{it},$$
$$\epsilon_{it} = \alpha_i + w_{it},$$

où α_i est **constant** dans le temps et propre à chaque unité statistique. Son influence sur la variable dépendante est la même à chaque date.

- Ce modèle n'est à première vue qu'une réécriture du modèle à effets fixes individuels. Toutefois, les effets individuels ne sont plus vus ici comme des **paramètres** à estimer, mais comme les réalisations d'une **variable aléatoire**.
- On va donc introduire des hypothèses supplémentaires pour rapprocher le comportement des effets individuels de celui d'un terme d'erreur. On l'appelle parfois ce modèle **le modèle à erreur composée**.

Le modèle à effets aléatoires : hypothèses (1/2)

Les effets individuels sont compris dans le terme d'erreur. On a besoin de s'assurer que celui-ci conserve ces propriétés habituelles pour ne pas trop s'éloigner d'un modèle standard. On spécifie d'une part les relations entre les observables et les erreurs.

Hypothèses :

1. H1 : $\mathrm{E}(\epsilon_{it}|x_{i1},\dots,x_{iT},\alpha_i) = 0, t = 1,\dots,T.$
2. H2 : $\mathrm{E}(\alpha_i|x_{i1},\dots,x_{iT}) = \mathrm{E}(\alpha_i) = 0.$

Interprétation des hypothèses (1/2)

- La première hypothèse est celle d'exogénéité stricte conditionnelle aux inobservables (cf chapitre 1). On a vu qu'elle impliquait l'absence de corrélation entre les erreurs et les explicatives
- La seconde est à la fois :
  - une hypothèse d'absence de corrélation entre une des composantes de l'erreur (l'effet individuel) et les explicatives. Elle peut être le résultat d'une hypothèse d'indépendance, souvent effectuée dans les applications utilisant des modèles à effets aléatoires mais rarement justifiable
  - une hypothèse sur l'espérance de la distribution de α, qui est une variable aléatoire dans ce chapitre !

Le modèle à effets aléatoires : hypothèses (2/2)

Dans un modèle linéaire standard, le terme d'erreur est une variable aléatoire. Une manière de conserver cette propriété est de le décomposer en la somme de deux variables aléatoires, satisfaisant elles-même de bonnes propriétés :

Hypothèses :

- H3 : $E(\alpha_i^2 | x_{i1}, \ldots, x_{iT}) = \sigma_\alpha^2$,
  $E\left[(w_{i1}, \ldots, w_{iT})(w_{i1}, \ldots, w_{iT})' | x_{i1}, \ldots, x_{iT}, \alpha_i\right] = \sigma_w^2 I_T$.

$\Rightarrow$ les deux composantes du terme d'erreur sont de variance finie, les w_{it} ne sont pas autocorrélés.

Interprétation des hypothèses (2/2)

H2 et H3 entraînent :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\alpha_i|x_{i1},\dots,x_{iT}) &= \mathrm{E}(\alpha_i^2|x_{i1},\dots,x_{iT}) - \mathrm{E}(\alpha_i|x_{i1},\dots,x_{iT})^2 \\ &= \mathrm{E}(\alpha_i^2) - \mathrm{E}(\alpha_i)^2 = \sigma_\alpha^2.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ les effets individuels sont homoscédastiques

La variance des erreurs

Modèle :

$$y_{it} = x_{it}^{'}\beta + \epsilon_{it},$$
$$\epsilon_{it} = \alpha_i + w_{it},$$

On a alors :

$$\mathrm{cov}[(\alpha_i + w_{it}), (\alpha_i + w_{is})] = \mathrm{E}(\alpha_i^2 + w_{it} w_{is}) = \begin{cases} \sigma_\alpha^2, & t \neq s. \\ \sigma_\alpha^2 + \sigma_w^2, & t = s. \end{cases}$$

D'où, pour $t \neq s$:

$$\mathrm{corr}(\epsilon_{it}, \epsilon_{is}) = \frac{\mathrm{cov}(\epsilon_{it}, \epsilon_{is})}{\sigma_\epsilon \sigma_\epsilon} = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 + \sigma_w^2} \geq 0.$$

Pour un individu i donné, la corrélation de ses erreurs est positive mais ne varie pas dans le temps (pas d'autocorrélation décroissantes des erreurs composites). Le modèle à effets aléatoires est parfois également appelé le **modèle à erreurs équicorrélées**.

Ecriture matricielle de la variance des erreurs

La matrice de variance des erreurs composées est de dimension $(NTxNT)$ et s'écrit :

$$\text{Var}(\epsilon) = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix},$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 + \sigma_w^2 & \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_w^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 + \sigma_w^2 \end{pmatrix}.$$

De quelle manière interviennent les erreurs ?

Dans un modèle à effets aléatoires, on a :

$$\mathrm{E}[y_{it}|x_{it}, \alpha_i] = \alpha_i + x_{it}^{'}\beta.$$

Bien que les caractéristiques individuelles inobservées apparaissent dans l'expression de y_{it}, elles n'affectent pas $\mathrm{E}(y_{it}|x_{it}) = \mathrm{E}_{\alpha}(\mathrm{E}[y_{it}|x_{it}, \alpha_i]) = x_{it}^{'}\beta$, car $\mathrm{E}(\alpha_i) = 0$. Par contre, les erreurs composées sont équicorrélées pour un individu, et sans corrélation entre individus.

$\Rightarrow$ les inobservables introduisent :

- une **surdipersion** ($\sigma_{\alpha}^2 > 0$)
- une **autocorrélation** des erreurs,
- mais n'ont pas d'impact sur la moyenne conditionnelle de Y.

Plan

L'estimateur *between* (1/2)

En prenant la moyenne sur toutes les années, on a :

$$y_{i.} = \alpha_i + x_{i.}^{'}\beta + w_{i.}.$$

On en déduit le **modèle *between*** :

$$y_{i.} = \alpha + x_{i.}^{'}\beta + (\alpha_i - \alpha + w_{i.}).$$

L'estimateur *between* est l'estimateur OLS de la régression de $y_{i.}$ sur une constante et les moyennes intertemporelles $x_{i.}$ (N observations !). Comme il exploite l'information contenue dans les $x_{i.}$, on l'appelle parfois l'estimateur *inter-individuel*.

L'estimateur *between* (2/2)

L'estimateur *between* :

- est **convergent** lorsque $x_{i.}$ est sans corrélation avec $(\alpha_i - \alpha + w_{i.})$
- n'est pas convergent lorsque $x_{i.}$ est corrélé avec α_i
- Il n'est pas **efficace** car $\text{Var}(\epsilon)$ n'est pas homoscédastique.

Comment estimer le modèle à effet aléatoire ? (1/2)

So far, so good, il ne s'agit dans le fond que d'un modèle empilé avec une structure particulière de la variance des erreurs composites. Du coup, l'estimation sans biais des β n'est pas particulièrement complexe.

L'estimateur OLS est un bon candidat : il sans biais et convergent, mais il a besoin d'erreurs homoscédastiques pour être le meilleur estimateur linéaire sans biais des β. De même, l'estimateur *within*, celui du modèle en différence première ou l'estimateur *between* ont besoin d'une structure d'erreur qui leur est propre pour être efficaces.

Comment estimer le modèle à effet aléatoire ? (2/2)

Pour les β, le problème n'est donc pas tant de trouver un estimateur convergent que de trouver un estimateur **efficace**.

Le problème est que l'estimation OLS n'est pas de plus petite variance, car la structure de la matrice de variance est incompatible avec des erreurs homoscédastiques. Comment estimer alors les coefficients avec précision ?

Plusieurs solutions

Les estimateurs efficaces pour ce modèle sont :

- Les GLS lorsque la variance des erreurs est connue (rare !)
- Les FGLS lorsqu'elle est inconnue (fréquent)
- ML, en supposant généralement que les deux erreurs sont gaussiennes

On se concentre dans ce cours sur les deux premiers, car les performances de l'estimateur ML dépendent du bien-fondé des hypothèses de normalité. De plus, selon les poids relatifs de σ_α et σ_w, la vraisemblance peut-être unimodale ou multimodale. Son optimisation est donc particulièrement délicate.

Plan

Rappel sur l'estimation GLS (1/2)

L'estimateur GLS d'un modèle linéaire $Y = X\beta + \epsilon$, où $\mathrm{E}(\epsilon\epsilon^{'}) = \Omega$, est :

$$\widehat{\beta}_{GLS} = (X^{'}\Omega^{-1}X)^{-1}X^{'}\Omega^{-1}Y.$$

(Exercice : sous quelles conditions sur les erreurs il se simplifie pour devenir l'estimateur OLS ?)

Rappel sur l'estimation GLS (2/2)

Il est équivalent de calculer directement l'estimateur GLS ou bien d'estimer par OLS le modèle :

$$\Omega^{-1/2}Y = \Omega^{-1/2}X\beta + \Omega^{-1/2}\epsilon.$$

(exercice !)

Comme $\text{Var}(\Omega^{-1/2}\epsilon) = \Omega^{-1/2}\text{Var}(\epsilon)(\Omega^{-1/2})' = I_{NT}$, l'estimateur OLS du modèle transformé est efficace.

Propriété de l'estimateur GLS

Lorsque les hypothèses du modèle sont satisfaites :

- **Propriétés à distance finie** : l'estimateur GLS est **sans biais et efficace**.
- **Propriétés asymptotiques** : l'estimateur GLS est **convergent et asymptotiquement efficace**.

Que vouloir de plus ?
L'ennui est que comme la vraie matrice de variance n'est pas observable (σ_α et σ_w inconnus, donc Ω inconnue), l'estimateur n'est pas vraiment utilisable.

Rappel sur l'estimation FGLS

Comme Ω est inconnue, l'estimateur GLS ne peut pas être mis en oeuvre directement. On peut résoudre ce problème en supposant que Ω dépend d'un nombre fini de paramètres ($\Omega \equiv \Omega(\gamma)$).

On estime alors $\widehat{\gamma}$ pour en déduire $\widehat{\Omega} = \Omega(\widehat{\gamma})$. Ensuite, comme l'estimateur GLS est linéaire, on peut utiliser $\widehat{\Omega}$ à la place de Ω dans les différentes formules.

Exemple d'estimation de Ω

Comme Ω est symétrique de dimension $(NTxNT)$, γ est potentiellement de dimension $[(NT)^2 + NT]/2$. Or γ n'est pas identifié s'il contient plus de $(NT - K)$ éléments. Pour limiter la dimension de γ, on est amenés à faire des **hypothèses sur la structure de** Ω.

Si on suppose que les erreurs sont hétéroscédastiques et mutuellement indépendantes, on peut supposer $\text{Var}(\epsilon|X) \equiv \exp(Z^{'}\gamma)$, où Z est un sous-ensemble de X. On peut obtenir $\widehat{\gamma}$ par régression (non-linéaire) des résidus $\widehat{\epsilon}^2_{OLS}$ sur $\exp(Z^{'}\gamma)$, puis former Ω comme la matrice diagonale d'éléments $\exp(Z^{'}_{it}\widehat{\gamma})$.

Dans le cas du modèle à **effet aléatoire pour données de panel**, Ω est une matrice bloc, dont les blocs sont A. Elle dépend donc de deux paramètres : σ_α et σ_w.

Propriétés usuelles de l'estimateur FGLS

Sous des hypothèses standard, assurant notamment que $\Omega(\gamma)$ est bien estimée, l'estimateur GLS est convergent (mais biaisé à distance finie), efficace et asymptotiquement gaussien.

Si $\Omega(\gamma)$ est mal spécifiée, l'estimateur FGLS est toujours convergent mais n'est plus efficace. Il ne présente alors plus d'intérêt particulier, sauf à recourir à des variances robustes pour le corriger.

Estimation GLS du modèle à effets aléatoires

On suppose pour le moment qu'on dispose d'estimateurs convergents de σ_α^2 et de σ_w^2. On a donc :

$$\widehat{A} \equiv \widehat{\sigma}_w^2 I_T + \widehat{\sigma}_\alpha^2 \iota_T \iota_T^{'}.$$

Dans le modèle à effets aléatoires, Ω est connue lorsque A est connue. L'estimateur GLS a donc pour expression :

$$\widehat{\beta}_{GLS} = (X^{'}\widehat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X^{'}\widehat{\Omega}^{-1}Y.$$

Estimation FGLS du modèle à effets aléatoires (1/3)

On a besoin d'estimer tout d'abord σ_α^2 et σ_w^2. Il se trouve qu'il est plus facile d'estimer en premier la variance de l'erreur composée (σ_ϵ^2).

Sous H3, on peut approcher σ_ϵ^2 par la variance empirique des erreurs composées. On a alors besoin d'estimer au préalable les ϵ_{it}. On peut les obtenir avec l'estimateur OLS du modèle empilé, noté $\tilde{\beta}$. Un estimateur convergent de σ_ϵ^2 est :

$$\widehat{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{NT - K} \sum_i \sum_t \tilde{\epsilon}_{it}^2.$$

Estimation FGLS du modèle à effets aléatoires (2/3)

Dans le modèle à effets aléatoire, l'autocorrélation des erreurs pour un individu donné est constante : $\sigma_\alpha^2 = \mathrm{E}(\epsilon_{it}\epsilon_{is}), \forall t \neq s$.

Pour chaque i, on dispose d'autant d'élément pour estimer σ_α^2 qu'il y a d'éléments dans les "triangles" de A, c'est-à-dire $(T^2 - T)/2$. En faisant leur somme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{s=t+1}^{T}\epsilon_{it}\epsilon_{is}\right) &= \sum_{t=1}^{T-1}\sum_{s=t+1}^{T}\sigma_\alpha^2 \\
&= \sigma_\alpha^2\frac{T(T-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Estimation FGLS du modèle à effets aléatoires (3/3)

Un estimateur convergent de σ_α est la moyenne empirique des résidus d'estimation par OLS du modèle empilé :

$$\widehat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{NT(T-1)/2 - K} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{s=t+1}^{T} \tilde{\epsilon}_{it} \tilde{\epsilon}_{is}.$$

Comme on dispose maintenant de $\widehat{\sigma}_\epsilon^2$ et de $\widehat{\sigma}_\alpha^2$, on en déduit :

$$\widehat{\sigma}_w^2 = \widehat{\sigma}_\epsilon^2 - \widehat{\sigma}_\alpha^2.$$

Algorithme FGLS

1. Estimer par OLS le modèle empilé, en déduire les résidus $\tilde{\epsilon}_{it}$
2. Evaluer :

$$\widehat{\sigma}_{\epsilon}^2 = \frac{1}{NT - K} \sum_i \sum_t \tilde{\epsilon}_{it}^2,$$

$$\widehat{\sigma}_{\alpha}^2 = \frac{1}{NT(T-1)/2 - K} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{s=t+1}^{T} \tilde{\epsilon}_{it} \tilde{\epsilon}_{is},$$

   puis en déduire $\widehat{\sigma}_w^2$.
3. Former $\widehat{A} = \widehat{\sigma}_w^2 I_T + \widehat{\sigma}_{\alpha}^2 \iota_T \iota_T'$, puis $\widehat{\Omega}$.
4. Calculer $\widehat{\beta}_{FGLS} = (X' \widehat{\Omega}^{-1} X)^{-1} X' \widehat{\Omega}^{-1} Y$.

Estimation FGLS d'un modèle à erreurs hétéroscédastiques et autocorrélées

Si les $w_{it}, \forall t$, sont hétéroscédastiques et autocorrélés, on utilise :

$$\widehat{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \tilde{\epsilon}_i \tilde{\epsilon}_i',$$

où $\tilde{\epsilon}_i$ correspond aux résidus pour l'individu i de l'estimation par OLS du modèle empilé.

- Pour N grand, cet estimateur est tout aussi efficace que celui exploitant la structure de A impliquée par l'hypothèse d'effet aléatoire. Le comportement de cet estimateur lorsque N est relativement petit est par contre moins satisfaisant.
- $\sum_{i=1}^{N} \tilde{\epsilon}_i \tilde{\epsilon}_i'$ contient parfois des éléments négatifs... ce qui indique une autocorrélation négative des erreurs composées, en contradicition avec l'hypothèse d'équicorrélation !

Ecriture alternative de l'estimateur FGLS (1/3)

Comme $\iota_T' \iota_T = T$, on a :

$$\begin{aligned} A &= \sigma_w^2 I_T + \sigma_\epsilon^2 \iota_T \iota_T' = \sigma_w^2 I_T + T\sigma_\epsilon^2 \iota_T (\iota_T' \iota_T)^{-1} \iota_T' \\ &= \sigma_w^2 I_T + T\sigma_\epsilon^2 P_T = (\sigma_w^2 + T\sigma_\epsilon^2)\left(P_T + \eta Q_T\right), \end{aligned}$$

où $\eta = \frac{\sigma_w^2}{\sigma_w^2 + T\sigma_\epsilon^2}$ et $Q_T = I_T - \iota_T (\iota_T' \iota_T)^{-1} \iota_T'$.

On note $S_T = (P_T + \eta Q_T)$. On a :

- $S_T^{-1} = (P_T + \frac{1}{\eta} Q_T)$
- $S_T^{-1/2} = \frac{1}{1-\lambda}(I_T - \lambda P_T)$, où $\lambda = 1 - \sqrt{\eta}$.
- $A^{-1/2} = (\sigma_w^2 + T\sigma_\epsilon^2)^{-1/2} \frac{1}{1-\lambda}(I_T - \lambda P_T) = \frac{1}{\sigma_w}(I_T - \lambda P_T)$.

Ecriture alternative de l'estimateur FGLS (2/3)

Du coup, l'estimateur FGLS est équivalent à l'estimateur OLS du modèle transformé :

$$y_{it} - \widehat{\lambda} y_{i.} = (1 - \widehat{\lambda})\beta_0 + (x_{it} - \widehat{\lambda} x_{i.})' \beta + v_{it},$$

où $\widehat{\lambda}$ est un estimateur convergent de $\lambda = 1 - \sigma_w / (T\sigma_\alpha^2 + \sigma_w^2)^{1/2}$, et $v_{it} = (1 - \widehat{\lambda})\alpha_i + (w_{it} - \widehat{\lambda} w_{i.})$.

La mise en oeuvre de cet estimateur requiert d'estimer au préalable σ_α et σ_w.

Ecriture alternative de l'estimateur FGLS (2/3)

De la régression *within* de $y_{it} - y_{i.}$ sur $x_{it} - x_{i.}$, on déduit :

$$\widehat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{N(T-1)-K} \sum_i \sum_t \left[(y_{it} - y_{i.}) - (x_{it} - x_{i.})' \widehat{\beta}_W \right]^2 .$$

De la régression *between* de $y_{i.}$ sur une constante et $x_{i.}$, où le terme d'erreur a pour variance $\sigma_\alpha^2 + \sigma_w^2 / T$, on obtient :

$$\widehat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{N-(K+1)} \sum_i \sum_t \left[y_{i.} - \widehat{\beta}_{0B} - x_{i.}' \widehat{\beta}_B \right]^2 - \frac{1}{T} \widehat{\sigma}_w^2 .$$

Propriétés de l'estimateur FGLS

Comme on ne dispose en pratique que d'une estimation de la matrice de variance, les propriétés à distance finie ne sont pas très bonnes (c'est le cas général pour ce type d'estimateur). *A contrario*, les propriétés asymptotiques sont bien meilleures.

Biais de l'estimateur FGLS

Comme tout estimateur du FGLS, celui du modèle à effet aléatoire est biaisé :

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\widehat{\beta}_{FGLS}|X) &= \mathsf{E}\left[\left(X'\widehat{\Omega}^{-1}X\right)^{-1}X'\widehat{\Omega}^{-1}(X\beta+\epsilon)|X\right] \\
&= \beta + \mathsf{E}\left[\left(X'\widehat{\Omega}^{-1}X\right)^{-1}X'\widehat{\Omega}^{-1}\epsilon|X\right] \\
&\neq \beta.
\end{aligned}$$

En effet, $\widehat{\Omega}$ n'est plus une constante mais une variable aléatoire, on ne peut donc pas la sortir de l'espérance. Le second terme serait nul si $\left(X'\widehat{\Omega}^{-1}X\right)^{-1}X'\widehat{\Omega}^{-1}$ était indépendant de ϵ. Or $\widehat{\Omega}$ est estimée à partir de résidus qui sont corrélés avec ϵ. Il n'y a donc pas indépendance.

Efficacité de l'estimateur FGLS

Les propriétés générales de l'estimateur FGLS s'appliquent ici, c-a-d il est efficace si la matrice de variance est bien estimée. En d'autres termes, lorsque toutes les hypothèses du modèle sont valides.

Propriétés asymptotiques de l'estimateur FGLS

Les estimateurs présentés plus haut de $\widehat{\sigma}_\alpha$ et $\widehat{\sigma}_w$ sont convergents lorsque $N \rightarrow \infty$ et T fini. L'estimateur FGLS est donc **asymptotiquement sans biais** et **efficace**.

Elles sont aussi valides lorsque $T \rightarrow \infty$ et $N \rightarrow \infty$ (à l'inverse de l'estimateur *within* par exemple). L'estimateur FGLS est donc aussi un bon candidat pour l'estimation de modèles avec des panels longs.

Plan

Tests basé sur l'analyse de la variance (1/2)

Une première manière consiste à tester la nullité de σ_α :

- H0 : $\sigma_\alpha = 0$
- H1 : $\sigma_\alpha \neq 0$

On peut montrer que :

$$\frac{\sigma_w^2}{T\sigma_\alpha^2 + \sigma_w^2} \frac{T\sigma_B^2}{\sigma_w^2} \sim F((N-K, N(T-1) - K_W),$$

où σ_B^2 est la variance des erreurs dans le modèle *between* et K_W est le nombre de variables explicatives dans le modèle lorsqu'on l'estime par transformation *within* (cad le nombre de variables qui ne sont pas constantes dans le temps).

Tests basé sur l'analyse de la variance (2/2)

Sous H0, $\sigma_\alpha = 0$ et la statistique se simplifie :

$$\frac{T\sigma_B^2}{\sigma_w^2} \sim F((N-K, N(T-1)-K_W),$$

On rejette H0 lorsque la statistique de Fisher est supérieur à sa valeur théorique sous H0.

Intuition : Si T fois la variance des résidus *between* est "significativement" plus élevée que la variance des erreurs purgées des effets individuels, alors on rejette l'hypothèse comme quoi ils sont négligeables.

Tests du multiplicateur de Lagrange

L'utilisation du test de Lagrange est suggérée par Breusch et Pagan (1979). Sous H0 :

$$\frac{NT}{2(T-1)}\left[\frac{\sum_i \left(\sum_t \tilde{\epsilon}_{it}\right)^2}{\sum_i \sum_t \tilde{\epsilon}_{it}^2} - 1\right]^2 \sim \chi^2_{(1)}.$$

Si cette statistique dépasse $\chi^2_{(1),0.95} = 3.84$, on rejette au seuil de 5% l'hypothèse d'effets individuels nuls.

Plan

Principaux résultats

- On peut modéliser l'influence des caractéristiques inobservables avec un élément d'un terme d'**erreur composé**
- Si les caractéristiques inobservables ne sont pas corrélées avec les variables explicatives, alors il n'y a pas de problème d'**endogénéité** et on peut utiliser des techniques standard d'estimation
- Comme la variable aléatoire capturant l'effet des inobservables est caractérisée par une distribution et une variance, cette information peut être utilisée pour obtenir des estimateurs plus **précis** que les estimateurs du modèle empilé, *within*...

L'estimateur FGLS : avantages et inconvénient

- \+ efficace sous l'hypothèse d'effet aléatoire, donc plus précis que l'estimateur du modèle empilé ou *within* dans ce contexte
- \+ estime les coefficients de variables constantes dans le temps
- \- biaisé à distance finie, c'est-à-dire en présence de petits échantillons
- \- requiert que les caractéristiques inobservables soient sans corrélation avec les caractéristiques observables

Variable aléatoire ou paramètre ?

Modèle de base :

$$y_{it} = x_{it}^{'}\beta + \alpha_i + \epsilon_{it},$$

Est-il plus judicieux de considérer α_i comme un paramètre à estimer ou une variable aléatoire ?

Fondamentalement, le problème n'est pas tant la nature des α_i que leur **corrélation** avec les caractéristiques observables. En consultant les manuels, il faut avoir en tête qu'"effet aléatoire" signifie que les α_i sont sans corrélation avec les caractéristiques observables, tandis que "effet fixe" veut dire qu'ils sont potentiellement corrélés.

Annexes

Exemple d'estimation FGLS (1/2)

```
R> library(plm)
R> data("Grunfeld", package = "plm")
R> head(Grunfeld)
  firm year   inv  value capital
1    1 1935 317.6 3078.5     2.8
2    1 1936 391.8 4661.7    52.6
3    1 1937 410.6 5387.1   156.9
4    1 1938 257.7 2792.2   209.2
5    1 1939 330.8 4313.2   203.4
6    1 1940 461.2 4643.9   207.2
```

Exemple d'estimation FGLS (2/2)

```
# Estimation FGLS
R> fgls <- pggls(inv ~ value + capital, data = Grunfeld
  effect = "individual", model = "random")
Warning message:
'random' argument to pggls() has been renamed as\\
  'pooling'
# cette commande utilise l'estimation de Omega robuste
# à l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité

R> summary(fgls)
<SNIP>
              Estimate   Std. Error  z-value   Pr(>|z|)
(Intercept) -4.0321e+01  3.6066e+00  -11.180 < 2.2e-16
value        1.1540e-01  8.6128e-04  133.981 < 2.2e-16
capital      2.3104e-01  4.0882e-03   56.514 < 2.2e-16
<SNIP>
```

Comparaison avec l'estimateur *within*

```
# Comparaison avec l'estimateur within
R> withi <- plm(inv ~ value+capital, data=Grunfeld,\\
model = "within")
summary(withi)
<SNIP>
        Estimate  Std. Error t-value  Pr(>|t|)
value   0.110124   0.011857   9.2879 < 2.2e-16
capital 0.310065   0.017355  17.8666 < 2.2e-16
---
<SNIP>
```

Test de nullité des effets individuels

```
# test des effets individuels
R> pool <- plm(inv ~ value + capital, data = Grunfeld,
 model = "pooling")
R> plmtest(pool, type = "bp")

Lagrange Multiplier Test - (Breusch-Pagan)

data:  inv ~ value + capital
chisq = 798.1615, df = 1, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: significant effects
```